pensar

per pensar d'un minut a una hora

Jordi Deulofeu
Departament de Didàctica de les Matemàtiques
i les Ciències
Universitat Autònoma de Barcelona
jordi.deulofeu@uab.cat

Som a l'estiu del 2022, l'any dels dosos, i escric aquest article amb el record ben viu de l'extraordinària ponència, així com del taller, que el professor Charlie Gilderdale ens va oferir recentment a les XX Jornades per a l'Aprenentatge i l'Ensenyança de les Matemátiques (JAEM), celebrades a València els primers dies de juliol. Com tots vosaltres, conec i utilitzo sovint, de fa temps, la magnífica pàgina web del projecte NRICH (nrich.maths.org), font inesgotable de problemes i activitats per a l'aula de matemàtiques, tant de primària com de secundària. Però ara he tingut el goig de conèixer en Charlie, un dels seus principals creadors, i gaudir de les seves sessions. A ell li dedico aquest article i aprofito per recomanar-vos les seves magnífiques propostes d'activitats per a l'aula de matemàtiques, de molts nivells diferents.

Problema 1. Primers consecutius

Començaré amb un problema que ens va proposar en Charlie (era el que estava pensant aquells dies a València) sobre nombres primers. Preneu dos nombres primers consecutius, majors que 2, i sumeu-los. Demostreu que el resultat serà un nombre compost que en la seva descomposició en factors primers té, almenys, tres factors (que poden ser repetits).

Per exemple, triem la primera parella: 3 i 5. La suma, 8, és $2 \cdot 2 \cdot 2$; és a dir, té tres factors. Un altre cas pot ser 11 i 13. La suma és 24, que és $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$; en aquest cas, té quatre factors. S'entén que són primers consecutius aquells que si llistem ordenadament tots els primers (en l'*On-line encyclopedia of integer sequences* 'OEIS, https://oeis.org/, és la successió A00040), ocupen dos llocs seguits en aquesta successió. No cal, doncs, que siguin primers bessons (aquells la diferència dels quals és 2), que són un cas particular de primers consecutius.

Si tenim en compte que els nombres que només tenen dos factors primers s'anomenen *semiprimers* (també *biprimers* o *quasiprimers)*, el problema es podria formular així: la suma de dos primers consecutius majors que 2 no és mai un semiprimer. De manera equivalent, també podríem dir que la suma de dos primers consecutius majors que 2 és el producte de dos primers.

La demostració no és gaire difícil, però sí que té un detall ben interessant que permet concloure-la. Quan el vaig trobar, vaig tenir el goig que es té quan hom descobreix un resultat bonic i se'm va escapar aquella expressió que tan bé caracteritza aquests moments: eureka!

Podeu trobar informació sobre la ponència i el taller que va impartir en Charlie a: https://nrich.maths.org/jaem2022. El primer que hi trobareu són les diapositives que va utilitzar i, a continuació, les diferents activitats que exemplifiquen els set punts que va tractar en la ponència i que em permeto recordar:

- Despertar la curiositat dels alumnes.
- Matemàtiques inclusives: activitats de terra baix i sostre alt.
- Temps per explorar en una cultura on s'accepten els errors.
- Oferir bastides perquè els alumnes segueixin explorant i construint.
- La importància de la col·laboració i el diàleg per convèncer.
- Valorar diferents estratègies i diferents representacions.
- Descobrir patrons, conjecturar, generalitzar i provar.

Dels molts exemples que va posar, em permeto reproduir-ne un que em sembla representatiu (fins allà on pot ser-ho un únic problema) de la seva proposta. És un petit joc d'estratègia per a dos jugadors (ja coneixeu la meva debilitat per aquest tipus de problemes) que podeu trobar i practicar en línia (amb indicació dels possibles errors) a: https://nrich.maths.org/5468.

▸ Problema 2. El joc dels múltiples i els divisors

Disposem de la taula dels cent primers nombres naturals. El primer jugador selecciona un nombre de la taula (menor que 50); per exemple, el 25. El segon jugador tria un nombre que sigui un múltiple o un divisor de 25; per exemple, el 5. Ara el primer ha de seleccionar un nombre múltiple o divisor de 5 sense repetir cap dels nombres ja utilitzats; és a dir, pot triar l'1, el 10, el 50 o el 75 (entre molts d'altres), però no el 25 o el 5. Es va formant una successió de nombres tots diferents; per exemple: 50, 25, 75, 5, 1, 47... El primer jugador que no pot jugar perd la partida.

Una vegada practicat el joc, es pot enfocar en dues direccions complementàries: trobar una estratègia per guanyar el joc (és a dir, impedir que l'altre pugui jugar) o bé considerar-lo com una activitat col·laborativa per tal de trobar, a partir d'un nombre inicial donat, quina és la cadena més llarga possible (també la més curta). En ambdós casos teniu al davant autèntics problemes de matemàtiques que, si els proposeu a l'aula, us permetran tractar els conceptes de múltiple i divisor d'una manera nova i original. No cal dir que, abans de portar-lo a la classe, cal dedicar una bona estona a analitzar les nombroses subtilitats d'aquest magnífic joc d'estratègia.

Tot i que ja m'agradaria seguir proposant-vos problemes d'en Charlie, ho deixaré aquí perquè els podeu trobar als materials ja esmentats i, de manera general, a la pàgina de l'NRICH. Tanmateix, continuaré l'article proposant-vos algun altre problema de nombres, que extrec de la xerrada organitzada pel Museu de Matemàtiques de Catalunya (MMACA) que vaig fer a la Facultat de Matemàtiques i Estadística (FME) de la Universitat Politècnica de Catalunya (UPC) en una data assenyalada: el 22-2-22. En la figura mostro l'anunci de la xerrada, que ens permet veure que la data, a més de ser capicua, si és escrita convenientment, té simetria central.

En la conferència vaig parlar de nombres formats per una sola xifra, dates curioses, capicues i altres curiositats amb nombres enters. Una de les idees que vaig desenvolupar és l'operació «girar un nombre», que consisteix a invertir l'ordre de les seves xifres. Els invariants d'aquesta operació són precisament nombres capicua. Combinant aquesta operació amb d'altres, es generen problemes interessants, alguns de senzills i coneguts, d'altres més difícils, fins i tot encara no resolts.

▸ Problema 3. Sempre s'acaba en un capicua?

Tornem a l'operació «invertir l'ordre de les xifres». Considerem un nombre i el que resulta d'invertir-ne les xifres i sumem els dos nombres: obtindrem un capicua? Si ho és, hem acabat. Si no ho és, repetim l'operació. Podem assegurar que sempre arribarem a un capicua amb un nombre finit de passos?

Exemple (I): 54; si l'invertim, tenim 45; sumem: $54 + 45 = 99$, capicua (1 pas).

Exemple (II): 73; si l'invertim, tenim 37; sumem: $73 + 37 = 110$. Ho repetim: $110 + 011 = 121$ (2 passos).

Exemple (III): 78; si l'invertim, tenim 87; sumem: $78 + 87 = 165$; $165 + 561 = 726$; $726 + 627 = 1.353$; $1.353 + 3.531 = 4.884$ (4 passos).

Una prova empírica permet assegurar que si el nombre té dues xifres, sempre acabem en un capicua. Tanmateix, el fet que ja per a alguns nombres de dues xifres la quantitat de passos sigui molt elevada, fa pensar que quan el nombre de xifres augmenti, el problema esdevindrà difícil. Concretament, el nombre 89 requereix 24 passos, el darrer dels quals dona un capicua de 13 xifres:

$$1.801.200.002.107 + 7.012.000.021.081 = 8.813.200.023.188$$

L'estudi per als nombres de tres xifres resulta apassionant i complex. Un nombre es diu que és de Lychrel (nom proposat per Wade van Landingham) si, quan repetim la seqüència anterior (invertir i sumar), mai obtenim un capicua. Ja amb nombres de tres xifres trobem «ferms» candidats a ser nombres de Lychrel, el menor dels quals és 196. S'han fet més de 700 milions d'iteracions i s'ha arribat a nombres de més de 300 milions de xifres sense obtenir cap capicua! Altres candidats amb tres xifres són: 295, 394, 493, 592, 689, 691, 788, 790, 879, 887, 978 i 986 (i els inversos corresponents).

Si bé en base 10 encara no s'ha demostrat que existeixen nombres de Lychrel, sí que s'ha aconseguit en altres bases de numeració. En particular, el nombre 10.110, de base 2 (curiosament, 22 en decimal), és un nombre de Lychrel. També n'hi ha en altres bases que són potències de 2.

Si voleu entretenir-vos estudiant aquests nombres, us aconsello que visiteu l'OEIS, aquest fantàstic lloc on trobareu una quantitat enorme de successions i les seves propietats.

THE ON–LINE ENCYCLOPEDIA OF INTEGER SEQUENCES ®

founded in 1964 by N. J. A. Sloane

En concret, per estudiar els nombres de Lychrel fixeu-vos en les successions:

- OEIS A056964 (n + nombre obtingut invertint les xifres de n).
- OEIS A023108 (successió dels candidats en base 10 a nombres de Lychrel).
- OEIS A060382 (successió a_n que dona el menor candidat en base n a ser un nombre de Lychrel).

▸ Problema 4. Més curiositats sobre nombres capicua

De la mateix manera que tot nombre és la suma de tres nombres triangulars o quatre quadrats, tot nombre es pot expressar com la suma de tres capicues (excepte en base 2, on, per exemple, 176 escrit en base 2 en necessita quatre).

Per exemple: 2.022 = 1.001 + 999 + 22 i també 2.002 + 11 + 9. Proveu amb altres nombres i mireu d'indentificar algun patró que us permeti trobar les descomposicions en suma de capicues.

Un exemple magnífic és el següent (prenem com a enter el nombre format pels 21 primers decimals del número pi):

$$\begin{aligned}&314159265358979323846 =\\&210100100111001001012 + 98639929400492993689 + 5419235847485329145\end{aligned}$$

Una de les propietats que més m'agrada de totes les que conec sobre nombres capicua és la que permet trobar, amb un càlcul senzill, el lloc que ocupa un capicua en la successió de tots els capicues, que exposo a continuació.

Si el nombre de xifres del capicua és parell, preneu la meitat de les xifres i afegiu-hi 1 davant. Per exemple, el capicua 347743 ocupa el lloc 1347. En canvi, si el nombre de xifres és senar, sumeu 1 a la primera xifra i al darrere poseu-hi la resta de xifres fins a la meitat (inclosa la xifracentral). Per exemple, el capicua 3.471.743 ocupa el lloc 4.471. Proveu amb altres nombres (podeu comprovar que el lloc obtingut és el correcte consultant la successió A002113 de l'OEIS. És bonic, oi?

Problema 5. Producte de quatre nombres consecutius

Acabaré l'article amb un darrer problema de nombres que em va proposar Xavier Valls i que, sens dubte, podria formar part de la col·lecció de problemes de l'NRICH. La seva formulació és tan senzilla com bonic és el problema: què podem dir del producte de quatre nombres naturals consecutius?

L'expressió «què podem dir» és volgudament oberta i ens permet pensar en les dues vessants dels problemes de matemàtiques: les conjectures (plausibles) i les demostracions. Aprofitant que és el darrer problema d'avui, us donaré ben poques pistes sobre el seu abordatge (segurament el tancarien massa ràpidament), i encara menys sobre la seva resolució completa. Analitzeu la situació i cerqueu patrons de manera lliure. I, quan us sembli que són conjectures sòlides, mireu de provar-les. Si el porteu a classe, tindreu, a més a més, pràctica productiva assegurada.

Gaudiu amb les situacions i els problemes d'avui i, sempre que pugueu, feu gaudir el vostre alumnat!

Bibliografia

Conway H. J.; Guy, R. (1996). *The book of numbers*. Nova York: Springer.

Deulofeu, J. (2019). *La magia de los números*. Barcelona: Gedisa.

Gilderdale, Ch. (2022). Enriquecer las matemáticas: ?'qué podemos ofrecer a nuestros alumnos si queremos que se conviertan en personas seguras de sí mismas y con recursos para resolver problemas? Conferència plenària i taller a les 20JAEM. València, juliol de 2022, https://nrich.maths.org/jaem2022 [consulta: 28 desembre 2022].

Gilderdale, Ch. (2022). *Factors and multiples game*, https://nrich.maths.org/5468 [consulta: 28 desembre 2022].

OEIS Foundation. *The on-line encyclopedia of integer sequences.* OEIS, https://oeis.org/ [consulta: 28 desembre 2022].